

Agora podemos continuar como antes, substituindo o 10 por n :

$$\frac{n^2/2}{3n+10} \geq \frac{n^2/2}{4n} = \frac{n}{8} > K \Leftrightarrow n > 8K.$$

Portanto, tomando N como o maior dos números $8K$ e 10 , teremos, como antes,

$$n > N \Rightarrow \frac{n^2 - \cos^2 n}{3n + 10} > K.$$

Se o denominador fosse $3n - 10$ não poderíamos substituir o 10 por n . Mas, veja: o objetivo é aumentar o denominador para diminuir a fração; basta então abandonar o 10, pois $3n - 10 < 3n$.

Algumas seqüências especiais

Exemplo 5. $n^k \rightarrow \infty$ qualquer que seja $k > 0$, não necessariamente inteiro. Com efeito,

$$n^k > K \Leftrightarrow k \ln n > \ln K \Leftrightarrow \ln n > \frac{\ln K}{k} \Leftrightarrow n > e^{\ln K/k}.$$

Exemplo 6. Se $a > 1$ um raciocínio parecido com o do Exemplo 3 permite provar que $a^n \rightarrow \infty$. Daqui e do Exemplo anterior, vemos que n^k/a^n é uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ se $k > 0$ e $a > 1$. Podemos ver que essa seqüência tende a zero considerando-a como restrição da função $f(x) = x^k/a^x = x^k/e^{(\ln a)x}$, a qual tende a zero com $x \rightarrow \infty$, como sabemos pela regra de l'Hôpital.

Exemplo 7. É fácil provar que $n! \rightarrow \infty$, pois $n! \geq n$ (Exercício 1 adiante). Portanto, a seqüência $a^n/n!$, com $a > 1$, também é uma forma indeterminada. Vamos provar que seu limite é zero,² isto é,

$$a > 1 \Rightarrow \lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Para isso, notamos que, sendo $n > N$,

$$\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N} \right) \left(\frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+2} \cdots \frac{a}{n} \right).$$

Agora fixamos um N tal que $a/N < 1/2$. Com isso, cada um dos $n - N$ fatores do segundo parêntese será inferior a $1/2$, o que fará com que o produto desses fatores tenda a zero. Veja:

$$\frac{a^n}{n!} < \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N} \right) \frac{1}{2^{n-N}} = \frac{c}{2^n},$$

onde $c = (2a)^N/N!$ é uma constante que só depende de N , que já está fixado. Ora, dado $\varepsilon > 0$, existe um N' tal que o último membro seja menor que ε , de sorte que

$$n > N' \Rightarrow \frac{a^n}{n!} < \varepsilon,$$

que prova o resultado desejado.

Exemplo 8. Mais fácil que o exemplo anterior é provar que $\lim n!/n^n = 0$. De fato, basta notar que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon.$$

²Resultado imediato quando $0 \leq a \leq 1$, pois, neste caso, $a^n \leq 1$.