ERRATA

ÁVILA – Cálculo das Funções de uma Variável – Vol. 1 – 7ª Edição/2003 – 5ª Impressão

Pág. 77	1ª Linha	Onde se Lê: ... $dx(=\Delta x)$ aparece na definição ...
		Leia-se: ... $dx(=\Delta x)$ que aparece na definição ...

Observe que o dx $(= \Delta x)$ aparece na definição de diferencial, $dy = f'(x)dx$ é uma nova variável independente, que pode assumir qualquer valor diferente de zero. Costuma-se dizer, ou mesmo pensar, que ela seja infinitamente pequena. Em geral isso é conveniente em certas aplicações físicas, mas não devemos perder de vista que essa variável dx não é necessariamente pequena.

Como é fácil ver, a derivada $f'(x)$ de $y = f(x)$ é também uma função de x. Podemos, então, considerar sua derivada, que é chamada *derivada segunda* de f. Ela é indicada pelos símbolos

$$f'', \quad D^{(2)}f, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad y'', \quad \ddot{y}.$$

Do mesmo modo, consideram-se derivadas terceira, quarta, etc. De um modo geral, a *derivada n-ésima* é indicada com os símbolos

$$f^{(n)}, \quad D^{(n)}f, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad y^{(n)}.$$

Continuidade das funções deriváveis

Já vimos o que significa dizer que uma função f é contínua num certo ponto x_0: f está definida nesse ponto, tem limite com $x \to x_0$ e esse limite é $f(x_0)$, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Por muito tempo os matemáticos pensavam que as funções contínuas fossem sempre deriváveis, à exceção, possivelmente, de alguns pontos, como os pontos angulosos. Em 1806, o grande sábio francês André Marie Ampère (1775–1836) procurou mesmo demonstrar esse fato. Mas isto não é verdade, como depois ficou provado com a construção de funções contínuas sem derivada em ponto algum. Acontece, entretanto, que a recíproca é verdadeira, e a demonstração não é difícil, como veremos a seguir.

Teorema. *Toda função derivável num ponto x_0 é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Seja f uma função derivável no ponto x_0, de sorte que a diferença η entre a razão incremental e a derivada,

$$\eta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0),$$

tende a zero com $x \to x_0$. Daqui segue-se que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\eta.$$

Quando $x \to x_0$, os dois últimos termos deste segundo membro tendem a zero; logo,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

o que completa a demonstração.

Observação. O leitor deve notar, nessa demonstração, que primeiro mostramos que $\eta \to 0$ com $x \to x_0$. Se nada soubéssemos sobre η, não poderíamos concluir que o tempo $(x - x_0)\eta$ tende a zero com $x \to x_0$. Por exemplo, se η fosse, digamos, $4/(x - x_0)^3$, então $(x - x_0)\eta$ seria igual a $4/(x - x_0)^2$ e tenderia a infinito com $x \to x_0$.